مبحث هفدهم (حرکت دورانی اجسام، گشتاور و ماتریس ممان اینرسی)

تا به این‌جا برای بررسی حرکت جسم، اگر چه با $\sum$ گرفتن، از تک تک ذرات بهره گرفتیم، اما در نهایت با استفاده از رابطه‌ی زیر توانستیم تنها در مورد حرکت یک نقطه از جسم یعنی مرکز جرم آن سخن بگوییم.

$$\sum F_{ext} = M_t D_e^2 r_{OC_m}$$

بنابراین کاستی‌ای که این‌جا وجود دارد این است که حرکت بقیه نقاط یک جسم را بررسی نکردیم. اگر چه بررسی حرکت مرکز جرم در برخی از کارها کافی است اما در موارد بسیاری همچون بررسی مانور خودرو، هواپیما و یا موشک علاوه بر حرکت مرکز جرم دانستن نحوه‌ی حرکت ابتدا و انتهای موشک نیز لازم است. اگر چه فاصله‌های ذرات موشک از دید دستگاه چسبیده به موشک با توجه به دانستن شکل آن مشخص است، اما حرکت ذرات آن از دید زمین نامشخص است.

با دانستن چه چیزی حرکت تک تک ذرات جسم نسبت به دستگاه زمین مشخص می‌شود؟

در پاسخ می‌توان گفت اگر نحوه‌ی دوران دستگاه چسبیده به یک جسم نسبت به دستگاه زمین را بدانیم، نحوه‌ی حرکت تمام اجزای این جسم را از دید دستگاه زمین خواهیم دانست.

در بسیاری از مسائلی که با آن مواجه هستیم، جسم صلب است. جسم صلب جسمی است که اگر دستگاهی روی بدنه‌ی آن با نام b (که از کلمه‌ی body گرفته شده است) را بنا کنیم و نقطه‌ی روی آن مانند مرکز جرم آن یا هر نقطه‌ی دیگری مشخص نماییم آن‌گاه بردار جابجایی تمام ذرات این جسم نسبت به این نقطه‌ی مشخص از دید دستگاه b تغییری نمی‌کند. یعنی رابطه‌ی زیر برای آن برقرار است:

$$D_b r_{kC_m} = 0 \qquad k = 1,2,\dots,n$$

بدیهی است که فرض دانستن شکل جسم به معنی دانستن ${}^b r_{kC_m}$ ها است که در جسم صلب نسبت به زمان ثابت است. همچنین اگر بدانیم دستگاه چسبیده به جسم نسبت به دستگاه چسبیده به زمین در هر لحظه چه دورانی پیدا کرده است یا به عبارت دیگر اگر ω_{eb} را بدانیم تکلیف حرکت تمام ذرات جسم از دید دستگاه زمین نسبت به یک نقطه‌ی معلوم از جسم نیز مشخص می‌گردد.

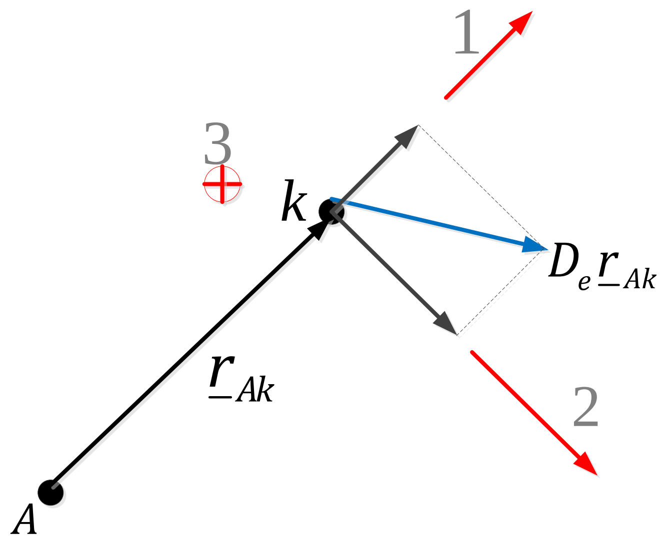
بنابراین با دانستن بردار سه‌تایی ${}^e r_{OC_m}$ و بردار سه‌تایی ω_{eb} حرکت جسم به طور کامل مشخص می‌شود. اگر این شش پارامتر در هر لحظه دانسته شود به اصطلاح می‌گویند معادلات شش درجه‌ی آزادی برای این جسم

بدست آمده است. که به سه پارامتر ${}^{e}r_{OC_m}$ حرکت خطی جسم یا حرکت یک نقطه از جسم می‌گویند و به سه پارامتر ω_{eb} حرکت دورانی جسم می‌گویند. بنابراین اگر حرکت خطی یک جسم و حرکت دورانی‌اش مشخص شود، تکلیف حرکت جسم مشخص می‌شود. مطابق با آن‌چه بیان شد حرکت خطی با $\frac{\sum F_{ext}}{M_t}$ مشخص می‌شود، اما حرکت دورانی را چطور مشخص کنیم؟

کلمه حرکت دورانی، دوران و گشتن، کلمه‌ی گشت‌آورنده یا همان گشتاور را ساخته است. لذا انتظار داریم در بررسی حرکت دورانی به مفهوم گشتاور برسیم. آن‌چه که در اختیار داریم n معادله‌ی زیر است:

$$\begin{cases} \sum F_1 = m_1 D_e^2 r_{O1} \\ \sum F_2 = m_2 D_e^2 r_{O2} \\ \quad\vdots \\ \sum F_k = m_k D_e^2 r_{Ok} \\ \quad\vdots \\ \sum F_n = m_n D_e^2 r_{On} \end{cases}$$

در ادامه به دنبال این هستیم که با استفاده از همین روابط به روابط حرکت دورانی برسیم. اگر به یاد داشته باشید در تعریف سرعت گفتیم سرعت را می‌توان به دو مولفه، یکی در راستای بردار جابجایی و دیگری عمود بر بردار جابجایی تجزیه نمود. همچنین گفتیم مولفه‌ی در راستای بردار جابجایی باعث افزایش یا کاهش مقدار سرعت می‌شود و مولفه‌ی عمود بر بردار جابجایی باعث دوران آن می‌شود(به شکل زیر توجه کنید). به همین دلیل ما به مولفه‌ی عمود بر بردار جابجایی که ارتباطی با دوران دارد، می‌پردازیم.



در شکل فوق، در صفحه‌ای که مشاهده می‌کنید r_{Ak} حول A دوران می‌کند. به دلیل اینکه ما دوران بین دو دستگاه را بهتر می‌دانیم دستگاهی مطابق شکل تعریف می‌کنیم. راستای اول این دستگاه در راستای بردار جابجایی است. راستای دوم این دستگاه را عمود بر راستای اول و در صفحه‌ای تعریف می‌کنیم که در آن هم r_{Ak} و هم سرعت آن وجود دارد. راستای سوم را نیز به صورت راستگرد با ضرب خارجی راستای اول و دوم تعریف می‌کنیم. از آن‌جایی که ممکن است با گذشت زمان بردار r_{Ak} و سرعتش دیگر روی این صفحه قرار نداشته باشند، این صفحه می‌تواند با گذشت زمان تغییر کند.

درون عبارت $r_{Ak} \times D_e r_{Ak}$ سرعت وجود دارد اما در n معادله‌ای که در اختیار داشتیم شتاب وجود دارد. لذا از این رابطه مشتق می‌گیریم به این امید که بتوانیم از آن n معادله بهره ببریم. بنابراین:

$$D_e(r_{Ak} \times D_e r_{Ak}) = D_e r_{Ak} \times D_e r_{Ak} + r_{Ak} \times D_e^2 r_{Ak}$$

از آن‌جایی که حاصل‌ضرب خارجی یک بردار در خودش صفر است، داریم:

$$D_e(r_{Ak} \times D_e r_{Ak}) = r_{Ak} \times D_e^2 r_{Ak}$$

در ادامه با توجه به اینکه نیرو به شتاب نسبت به نقطه‌ی اینرسی مثلاً O مربوط است، عبارت بالا را به صورت زیر تغییراتی می‌دهیم تا به نیرو برسیم.

$$\begin{aligned} D_e(m_k(r_{Ak} \times D_e r_{Ak})) &= m_k\, D_e r_{Ak} \times D_e r_{Ak} + m_k r_{Ak} \times D_e^2 r_{Ak} = m_k r_{Ak} \times D_e^2 r_{Ak} \\ &= m_k r_{Ak} \times D_e^2(r_{Ok} - r_{OA}) = m_k r_{Ak} \times D_e^2 r_{Ok} - m_k r_{Ak} \times D_e^2 r_{OA} \\ &= m_k r_{Ak} \times \frac{F_k}{m_k} - m_k r_{Ak} \times D_e^2 r_{OA} = r_{Ak} \times F_k - m_k r_{Ak} \times D_e^2 r_{OA} \end{aligned}$$

$$\boxed{D_e(m_k(r_{Ak} \times D_e r_{Ak})) = r_{Ak} \times F_k - m_k r_{Ak} \times D_e^2 r_{OA}}$$

توجه کنید که یک ترم جدید اضافه شد. رابطه‌ی فوق برای n ذره برقرار است. بنابراین با جمع n رابطه، برای کل جسم خواهیم داشت:

$$D_e\left(\sum_{k=1}^{n} m_k(r_{Ak} \times D_e r_{Ak})\right) = \sum_{k=1}^{n} r_{Ak} \times F_k - \left(\sum_{k=1}^{n} m_k r_{Ak}\right) \times D_e^2 r_{OA}$$

طبق رابطه‌ی فوق می‌توانیم گشتاور را حول هر نقطه‌ای به غیر از مرکز جرم نیز بدست آوریم و تنها یک عبارت اضافی در آن بوجود می‌آید.

در رابطه‌ی فوق اگر A برابر مرکز جرم باشد عبارت $\sum_{k=1}^{n} m_k r_{Ak}$ صفر می‌شود و رابطه‌ی فوق به صورت زیر ساده می‌شود.

$$D_e\left(\sum_{k=1}^{n} m_k(r_{C_m k} \times D_e r_{C_m k})\right) = \sum_{k=1}^{n} r_{C_m k} \times F_k$$

بنابراین طبق رابطه‌ی فوق، سرعت اندازه‌ی حرکت دورانی کل جسم از دید e و حول C_m برابر است با گشتاور نیروهای خارجی کل ذرات حول C_m . این گشتاور را معمولاً با τ نشان می‌دهند.

در ادامه می‌خواهیم تکلیف ω را با گشتاور نیروهای خارجی پیدا کنیم. توجه دارید که دوران بوسیله‌ی گشتاور نیروها حول نقطه‌ای مشخص در مورد یک جسم تحلیل می‌شود ولی حرکت خطی یا شتاب جسم بوسیله‌ی خود نیروها بررسی می‌شود.

از طرف دیگر پرواضح است که از قضیه کوریولیس داریم:

$$\sum m_k(r_{Ak} \times D_e r_{Ak}) = \sum m_k(r_{Ak} \times (D_b r_{Ak} + \omega_{eb} \times r_{Ak}))$$

اگر جسم صلب باشد و A هر نقطهٔ دلخواه آن، آنگاه عبارت $D_b r_{Ak}$ صفر می‌شود. همچنین طبق رابطه‌ی زیر:

$$r \times (\omega \times r) = (r.r)\omega - (r.\omega)r$$

داریم:

$$\sum m_k(r_{Ak} \times D_e r_{Ak}) = \sum m_k(r_{Ak} \times (\omega_{eb} \times r_{Ak})) = \sum m_k\,[(r_{Ak}.r_{Ak})\omega_{eb} - (r_{Ak}.\omega_{eb})r_{Ak}]$$

برای عددی کردن رابطه‌ی فوق آن را در دستگاه دلخواهی مانند s بیان می‌کنیم:

$$^{s}\left(\sum m_k(r_{Ak} \times D_e r_{Ak})\right) = \sum m_k \left[\rho_{Ak}^2 \ {}^{s}\omega_{eb} - \left({}^{s}r_{Ak}{}^{T} \ {}^{s}\omega_{eb}\right) {}^{s}r_{Ak}\right]$$

چون نتیجه‌ی ضرب داخلی ${}^{s}r_{Ak}{}^{T} \ {}^{s}\omega_{eb}$ یک عدد است می‌توان آن را جابجا نمود.

$$^{s}\left(\sum m_k(r_{Ak} \times D_e r_{Ak})\right) = \sum m_k \left[\rho_{Ak}^2 \ {}^{s}\omega_{eb} - \ {}^{s}r_{Ak}\left({}^{s}r_{Ak}{}^{T} \ {}^{s}\omega_{eb}\right)\right]$$

حال می‌توان از فاکتور گرفت:

$$^{s}\left(\sum m_k(r_{Ak} \times D_e r_{Ak})\right) = \left(\sum m_k \left[\rho_{Ak}^2 - \ {}^{s}r_{Ak}\left({}^{s}r_{Ak}{}^{T}\right)\right]\right) {}^{s}\omega_{eb} = \ {}^{s}I_A \ {}^{s}\omega_{eb}$$

ماتریس ممان اینرسی جسم حول نقطه‌ی A از دید دستگاه s است. این ماتریس به A، s و خود جسم بستگی دارد. همچنین s می‌تواند هر دستگاه دلخواهی ازجمله دستگاه بدنه (b) اختیار شود. ماتریس ممان اینرسی ماتریس متقارن بوده و ${}^{s}I_A = \ {}^{s}I_A{}^{T}$ است. و معمولاً آن را به فرم زیر نمایش می‌دهند.

$$^{s}I_A = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

به عنوان نمونه ماتریس ممان اینرسی یک کره با توزیع جرمی یکسان که حول یکی از محورهای x یا y یا z دوران می‌کند، ماتریسی است که تمام درایه‌های آن به غیر از درایه‌های قطر اصلی صفر بوده و درایه‌های قطر اصلی آن با هم برابر اند.

در مثال چرخ و فلک نیز هر چه کودک در فاصله‌ی دورتری از مرکز چرخ بنشیند یا هر چه سنگین‌تر باشد، مولفه‌ی در جهت محور دوران آن بزرگتر شده و برای دادن شتاب دورانی به آن به گشتاور بیشتری نیاز خواهیم داشت. ماتریس ممان اینرسی چرخ و فلک نیز قطری بوده و مولفه‌های I_{xx} و I_{yy} آن با هم برابر بوده و مولفه‌ی I_{zz} آن مقداری بزرگتر از دو مولفه‌ی دیگر دارد.

وقتی شخصی روی زمین ایستاده است، از طرف زمین نیروی وزن به آن اعمال شده و در خلاف جهت آن نیروی سطح به زمین وارد می‌شود. نیروی وزن به تمام بدن ما وارد می‌شود، اما نیروی سطح تنها از طریق پا به زمین وارد می‌شود. و به دلیل اینکه شخص هیچ‌گونه دورانی حول مرکز جرم ندارد گشتاور تمام نیروهای خارجی آن

حول مرکز جرم صفر است. اما در مورد یک شخص در حال انجام ژیمناستیک، گشتاور تمام نیروهای خارجی‌اش حول مرکز جرم صفر نمی‌باشد.